线性代数　中国科学技术大学 2023 春
欧氏空间

主讲: 杨金榜
地空楼 525

助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\text{-线性空间} & + & \text{内积} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{欧氏空间} \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow, bend right] & \\
 & & \text{度量矩阵} \arrow[d, Rightarrow] & \text{正交变换} \arrow[r, Rightarrow] & \text{正交矩阵} \\
 & & \text{正定矩阵} & \text{伴随变换} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{转置} \\
 & & & \text{自伴随变换} \arrow[r, Rightarrow] & \text{对称矩阵}
\end{tikzcd}
$$

$$
\mathbb{C}\text{-线性空间} \quad + \quad \text{内积 (??)} \Longrightarrow \text{?? 空间}
$$

复数模长和复数组向量模长 *

1. $x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| = \sqrt{x \cdot x}$;
2. $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \xRightarrow{\text{标准内积下}} |x| = \sqrt{x_1 x_1 + \cdots + x_n x_n}$;
3. $z \in \mathbb{C} \Rightarrow |z| = \sqrt{\overline{z} \cdot z}$;

很自然地, 我们可以如下定义复数组向量的长度:

$$z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n \Rightarrow |z| = \sqrt{\overline{z_1} z_1 + \cdots + \overline{z_n} z_n};$$

对于任意复矩阵 A, 记

$$A^H := \overline{A}^T$$

称其为 A 的共轭转置. 则复数组 (列) 向量的长度公式可写为

$$|z|^2 = z^H \cdot z.$$

注: 共轭转置保持加法, 但只是在共轭意义下保持数乘.

复向量空间上的内积定义 *

定义 (酉空间)

设 V 为复线性空间. 若映射

$$(-,-): V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

满足

1. 共轭对称性 $(a,b) = \overline{(b,a)}$;
2. 线性性 $(a, \lambda b + \mu c) = \lambda(a,b) + \mu(a,c)$;
3. 正定性 $(a,a) \geq 0$, 且等号成立当且仅当 $a = 0$,

则称 (a,b) 为 a 和 b 的内积. 定义内积的复线性空间称为酉空间.

注: $(\lambda a, b) = \overline{\lambda}(a,b)$.

正定复矩阵 *

定义

设 V 为 n 维酉空间.G 为 n 阶复矩阵.

1. 称 G 为正定复矩阵, 若
    1. $G^H = G$;
    2. 任意给定列向量 $z \in \mathbb{C}^n$ 都有 $z^H G z \geq 0$, 并且等号成立当且仅当 $z = 0$.
2. 向量 a 的长度 (或模长)定义为 $|a| := \sqrt{(a, a)}$.
3. 垂直 (正交),标准正交基,Schmit 正交化,正交补,Schwarz 不等式,$\cdots$

共轭变换 (伴随变换)*

定义 (共轭变换, 伴随变换)

设 $\mathscr{A}$ 为酉空间 V 上的一个线性变换. 则

- 存在唯一的 V 上的线性变换 $\mathscr{A}^*$ 满足对任意 $a, b \in V$
$$(\mathscr{A}a, b) = (a, \mathscr{A}^*b).$$
称 $\mathscr{A}^*$ 是 $\mathscr{A}$ 的共轭变换(或伴随变换).
- 若 $\mathscr{A}$ 在标准正交基下矩阵为 A, 则 $\mathscr{A}^*$ 在同一组标准正交基下矩阵为 A^H.

设 $\mathscr{U}$ 为酉空间 V 上的线性变换. 则

$$
\begin{aligned}
\mathscr{U}\ \text{为酉变换} &\overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow} \mathscr{U}\ \text{保持内积} \\
&\Leftrightarrow \mathscr{U}\ \text{保持向量长度} \\
&\Leftrightarrow \mathscr{U}\ \text{将标准正交基变为标准正交基} \\
&\Leftrightarrow \mathscr{U}^*\mathscr{U} = \mathrm{id}_V \\
&\Leftrightarrow \mathscr{U}\ \text{在标准正交基下的矩阵}\ U\ \text{为酉矩阵(即,}U^H U = I\text{)}
\end{aligned}
$$

定理

酉空间 V 上的全体酉变换组成的集合 $U(V)$ 在复合的作用下构成群.

Hermite 变换 *

设酉空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 在某组标准正交基下矩阵为 A. 则[1]

$$\mathscr{A} \text{ 为Hermite 变换} \overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow} \mathscr{A}^* = \mathscr{A}(\text{自伴随})$$

$$\Leftrightarrow (\mathscr{A}a, b) = (a, \mathscr{A}b), \quad (\forall a, b \in V)$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 为Hermite 矩阵(即}, A^H = A).$$

[1] 在物理中,Hermite 变换代表可观测量.

规范变换 *

设 $\mathscr{A}$ 为酉空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$.

$$\mathscr{A}\text{ 为规范变换} \overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow} \mathscr{A}^*\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{A}^*$$

$\Leftrightarrow A$ 酉相似于对角阵

$\Leftrightarrow A$ 在某组标准正交基下为对角阵.

推论

设 $\mathscr{U}$ 为酉变换. 则

1. $\mathscr{U}$ 的特征值 λ 模为 1. 即, 存在 $\theta \in [0, 2\pi)$ 使得 $\lambda = e^{i\theta}$.
2. $\mathscr{U}$ 在某组标准正交基下矩阵为对角阵 $\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \cdots, e^{i\theta_n})$.

证明思路:$D^H D = I \Rightarrow |\lambda_i| = 1$.

推论

设 $\mathscr{A}$ 为 *Hermite* 变换. 则

1. $\mathscr{A}$ 的特征值全为实数;
2. $\mathscr{A}$ 在某组标准正交基下的矩阵为实对角矩阵.

证明思路:$D^H = D \Rightarrow \lambda_i \in \mathbb{R}$.

问题: 反 Hermite 变换?